ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΙΣΙΩΝ-ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

Προτεινόμενες λύσεις θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ. βιβλίο σελ. $28-29$

Α2. Ορισμός σχ. βιβλίο σελ. 87

Α3.
α. – Λάθος, σχ. βιβλίο σελ.96
β. – Σωστό, σχ. βιβλίο σελ.40
γ. – Λάθος, σχ. βιβλίο σελ.86

Α4.
α. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, σχ. βιβλίο σελ.$33$
β. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$, σχ. βιβλίο σελ.$32$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η μέση τιμή είναι
$$\bar{x} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$$
Για την εύρεση του εύρους βάζουμε τις τιμές κατά αύξουσα σειρά $5, 10, 15, 20, 25$, τότε το εύρος είναι
$R = 25 - 5 = 20$

Β2. Η διακύμανση είναι
$$s^2 = \frac{(5-15)^2+(10-15)^2+(15-15)^2+(20-15)^2+(25-15)^2}{5} \Rightarrow$$
$$s^2 = \frac{100+25+0+25+100}{5} \Rightarrow s^2 = \frac{250}{5} \Rightarrow s^2 = 50$$

Β3. Η τυπική απόκλιση είναι:
$s = \sqrt{50} \Rightarrow s = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$
Ο συντελεστής μεταβολής CV του δείγματος είναι:
$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Rightarrow CV = \frac{5\sqrt{2}}{15} \Rightarrow CV = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
Είναι $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ άρα
$CV \simeq 0{,}47 > 0{,}1$
άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + 1, x, a \in \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική συνάρτηση με πρώτη παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 18x + a$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης για $x = 1$ είναι ίσος με 0 , τότε
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow a = 15.$

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι $y = \lambda x + \beta$.
Όπου $\lambda = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = -9.$
Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $M\big(2, f(2)\big)$, άρα οι συντεταγμένες
$x = 2, y = f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$
επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, έτσι
$3 = -9 \cdot 2 + \beta \Rightarrow 3 + 18 = \beta \Rightarrow \beta = 21.$
Άρα $y = -9x + 21.$

Γ3. Για $a = 15$ η συνάρτηση είναι $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ με παράγωγο
$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15.$
Λύνουμε την εξίσωση
$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Rightarrow$
$\alpha = 3, \beta = -18, \gamma = 15, \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15 = 144,$
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{18 \pm 12}{6}, x_1 = 5, x_2 = 1$$

Κατασκευάζουμε το πινακάκι μονοτονίας

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα για $x \in (-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$ και φθίνουσα για $x \in [1,5]$.
Η συνάρτηση έχει ένα τοπικό μέγιστο στη θέση $x = 1$ το $f(1) = 8$ και ένα τοπικό ελάχιστο στη θέση $x = 5$ το $f(5) = -24$.

Γ4. Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1}$$

Το όριο είναι της μορφής $\frac{0}{0}$, παραγοντοποιούμε και έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-5)}{x+1} = -\frac{12}{2} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Δ1. Η συνάρτηση για να ορίζεται πρέπει $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ή $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.
Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$f'(x) = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2. Είναι $f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}$ και $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$
Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

Η τυπική απόκλιση είναι

$$s=\frac{1}{2f'(1)}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=2$$

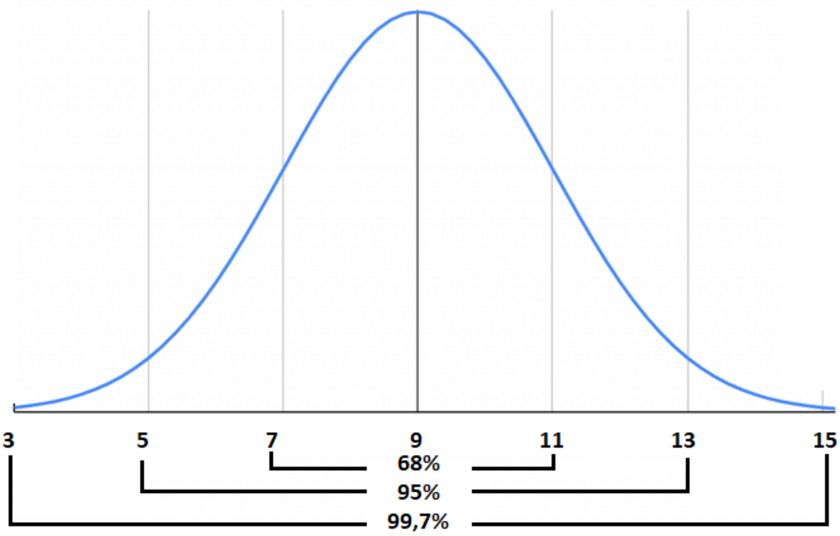
Δ3. Το πλήθος των μαθητών είναι $\nu = 2000$.
Το ποσοστό από $5-11$ λεπτά είναι:

$$68+\frac{95-68}{2}=68+13{,}5=81{,}5$$

Άρα το ποσοστό είναι $81{,}5\%$.
Άρα το πλήθος των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής από $5-11$ λεπτά είναι $81{,}5\%\cdot 2000=1630$ μαθητές.
Το ποσοστό των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά είναι

$$\frac{100-99{,}7}{2}=0{,}15$$

Άρα το ποσοστό είναι $0{,}15\%$.
Άρα το πλήθος των μαθητών που έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά είναι $0{,}15\%\cdot 2000=3$ μαθητές.



Δ4. Αν x_i είναι οι αρχικοί χρόνοι επιστροφής των μαθητών, θέτουμε ως $y_i = x_i + 3$ τους νέους χρόνους επιστροφής.

Τότε η μέση τιμή είναι $\bar{y}=\bar{x}+3=9+3=12$.
και η τυπική απόκλιση παραμένει η ίδια, δηλαδή $s_y = s_x = 2$.