ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 135 σχολικού βιβλίου (απόδειξη θεωρήματος).

Α2. Σελίδα 51 σχολικού βιβλίου.

Α3. Σελίδα 23 σχολικού βιβλίου.

Α4. **(α)** Σωστό **(β)** Λάθος **(γ)** Σωστό **(δ)** Σωστό **(ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $x+1=u$, $u\in\mathbb{R}$ άρα $x=u-1$ επομένως $f(u)=u\cdot e^{1-u}$

άρα $f(x)=xe^{1-x}, x\in\mathbb{R}$

Β2. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}\Leftrightarrow f'(x)=e^{1-x}(1-x)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)=0\overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow}1-x=0\Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(1-x)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}1-x>0\Leftrightarrow x<1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

Η f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2=[1,+\infty)$.

Στη θέση $x=1$ παρουσιάζει μέγιστο το $f(1)=1$

Β3. $f''(x)=-e^{1-x}(1-x)-e^{1-x}\Leftrightarrow f''(x)=e^{1-x}(-1+x-1)\Leftrightarrow f''(x)=e^{1-x}(x-2)$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)=0\overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow}x-2=0\Leftrightarrow x=2$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)>0\overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow}x-2>0\Leftrightarrow x>2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	∩		∪

Η f κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2]$ και κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$ ενώ το σημείο $M(2,f(2))$ ή $M\left(2,\frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής.

B3. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για το $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{e^x}=+\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

Οπότε η f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

Για το $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

άρα βρίσκουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{e^x}=0$$

Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

B4.

(i) Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_1=(-\infty,1]$ άρα :

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1] \text{ διότι } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(xe\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_2=[1,+\infty)$ άρα :

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=(0,1]$$

Επομένως : $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$

(ii) Διακρίνω τις παρακάτω περιπτώσεις

-Αν $\lambda\in(-\infty,0)$ τότε $\lambda\in f(A_1)$ οπότε υπάρχει $x_1\in(-\infty,1)$ ώστε $f(x_1)=0$

Το x_1 μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1

-Αν $\lambda\in(0,1)$ τότε

$\lambda\in f(A_1)$ οπότε υπάρχει $x_2\in(-\infty,1)$ ώστε $f(x_2)=0$

Το x_2 μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_1

$\lambda \in f(A_2)$ οπότε υπάρχει $x_3 \in (1,+\infty)$ ώστε $f(x_3)=0$

Το x_3 μοναδικό διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2

- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη
- Αν $\lambda = 0$ τότε $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- Αν $\lambda = 1$ τότε $f(x)=1 \Leftrightarrow x=1$ (θέση ολικού μεγίστου)

Εξίσωση	**Τιμές του λ**	**Πλήθος ριζών**
$f(x)=\lambda$	$\lambda \in (-\infty, 0)$	1
	$\lambda \in (0,1)$	2
	$\lambda \in (1,+\infty)$	0
	$\lambda = 1$	1 (την $x=0$)
	$\lambda = 0$	1 (την $x=1$)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Για $x<0$ η f συνεχής ως πολυωνυμική.

Για $x>0$ η f συνεχής ως τριγωνομετρική .

Στο $x=0$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1\right) = 1$$

$$f(0)=1$$

Επομένως η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της .

Για την παράγωγο στο $x_0 = 0$ έχουμε :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(\alpha x^2 - 3x - 1\right)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\alpha x^2 - 3x - 1\right) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ εφόσον

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Γ2.

(i) **1η προϋπόθεση**

Η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της από το ερώτημα (Γ1) άρα και συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

2η προϋπόθεση

Η f παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική με

$f'(x) = -\eta\mu x$

3η προϋπόθεση

$f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ δηλαδή $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα δεν ικανοποιείται η **3η προϋπόθεση** του θεωρήματος Rolle ενώ η 1η και η 2η ικανοποιούνται.

(ii) Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \overset{x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x = \pi$

Άρα $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \pi$

Γ3. Για $x < 0$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$

Το τριώνυμο $3\alpha x^2 - 6x - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3 + \alpha) < 0$ αφού $\alpha < -3$ άρα διατηρεί πρόσημο και επειδή $\alpha < 0$ ισχύει $3\alpha x^2 - 6x - 1 < 0$ άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ οπότε δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη τέτοια ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ δηλαδή να ισχύει $f'(x) = 0$ για κάποιο $x < 0$.

Γ4. Από το **Γ3** ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	↘	↘		↗

Η f γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \pi]$

και επειδή είναι συνεχής στο $x = 0$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$

και γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ενώ στη θέση $x = \pi$ έχει ελάχιστο το $f(\pi) = -1$

Οπότε για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει: $f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ τη συνάρτηση $k(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$

Η συνάρτηση $k(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$k(1) = -1 < 0$ και $k(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ δηλαδή $k(1) \cdot k(e) < 0$

άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$k(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \ \mathbf{(1)}$$

Η k παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $k'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε γνησίως αύξουσα επομένως η ρίζα x_0 είναι μοναδική .

Δ2. Έχουμε $f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1$ με $x > 0$, και λόγω της **(1)**

$$f(x) = \frac{1}{x_0}(x+1) - \ln x - 1$$

Η f παραγωγίσιμη στο $A_f = (0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x - x_0}{x_0 x}$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_0 x}=0 \Leftrightarrow x=x_0$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{x_0 x}>0 \Leftrightarrow x>x_0,\ x_0>0 \text{ εφόσον } x_0\in(1,e)$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	

Η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[x_0,+\infty)$

Στη θέση $x=x_0$ η f έχει ελάχιστο το

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\ln x_0-1=1+\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1=0$$

Δ3.

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \frac{x}{e^x}=\frac{(x_0)^{x+1}}{e^{x+1}}\Leftrightarrow e^{x+1}x=e^x(x_0)^{x+1}\Leftrightarrow ex=(x_0)^{x+1}\ \mathbf{(2)}$$

Αν $x\le 0$ η (2) είναι αδύνατη οπότε η **(2)** ορίζεται στο $(0,+\infty)$.

Επομένως :

$$\ln(ex)=\ln(x_0)^{x+1}\Leftrightarrow \ln x+1=(x+1)\ln x_0\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

Άρα $\boxed{g(x_0)=h(x_0)}$

Η $g(x)=xe^{-x}$ παραγωγίσιμη με $g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

Η $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$

$$g'(x_0)=e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=x_0e^{-x_0}(\ln x_0-1)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1}{x_0}-1\right)=\frac{x_0}{e^{x_0}}\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Άρα $\boxed{g'(x_0)=h'(x_0)}$

Επειδή $g(x_0)=h(x_0)$ και $g'(x_0)=h'(x_0)$ οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0

Δ4.

Αν d η κατακόρυφη απόσταση των σημείων Α και Β τότε : $d(x)=|f(x)-\varphi(x)|$ και επειδή $f(x)>\varphi(x)$ τότε : $d(x)=f(x)-\varphi(x)$

Ισχύει $d(x)\geq d(x_0)$ για κάθε $x>0$

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε επειδή στη θέση $x=x_0$ η $d(x)$ έχει ελάχιστο τότε από θεώρημα Fermat ισχύει

$d'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-\varphi'(x_0)=0 \overset{(\Delta_2)}{\Leftrightarrow} 0-\varphi'(x_0)=0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0)=0$ οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο .