ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΙΣΙΩΝ-ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Προτεινόμενες λύσεις θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ. βιβλίο σελ. 186

Α2. Θεώρημα σχ. βιβλίο σελ. 142

Α3. Ορισμός σχ. βιβλίο σελ. 161

Α4.
α. – Σ σχ. βιβλίο σελ. 67
β. – Σ
γ. – Σ σχ. βιβλίο σελ. 114
δ. – Λ σχ. βιβλίο σελ. 53
ε. – Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης $h = f \circ g$ είναι:

$$A_h = \begin{cases} x \in A_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x) \in A_f \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ x \leq 1 \end{cases} = [0,1]$$

Ο τύπος της σύνθετης συνάρτησης είναι:

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2. Η $h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με πρώτη παράγωγο:
$h'(x) = ((x-1)^2)' = 2(x-1) \leq 0\ \forall x \in [0,1]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα και άρα είναι "$1-1$".

Για την αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1}(x)$ λύνουμε την εξίσωση ως προς x:
$y = h(x) \Rightarrow y = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = |x-1| \Rightarrow \sqrt{y} = -(x-1) \Rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$
Έτσι $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης h:
$A_{h^{-1}} = h(A) = [h(1), h(0)] = [0,1]$

Β3. Η δεδομένη συνάρτηση είναι

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2} \quad , x = 1 \end{cases}$$

(i) Για $x \in [0,1)$ η φ είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων. Ελέγχουμε τη συνέχεια της συνάρτησης στο σημείο $x_0 = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \varphi(1)$$

Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης είναι

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών.

(ii) Αφού $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\eta\mu x \nearrow \sigma\tau o \left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow$

$\varphi(1) < \eta\mu\alpha < \varphi(0)$

Άρα από Θ.Ε.Τ. από (i) υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \begin{cases} -2 & , x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , x > -1 \end{cases}$

- Για $x < -1$: $f'(x) = -2 \Rightarrow f(x) = -2x + c_1$
- Για $x > -1$: $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = x^3 - x + c_2$
- Για $x = 0$: $f(0) = c_2 \xrightarrow{f(0)=0 \ \delta\iota\acute{o}\tau\iota \ O(0,0)\in C_f} c_2 = 0$
- Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow$

  $2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases}$

Γ2. Η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$

$y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$

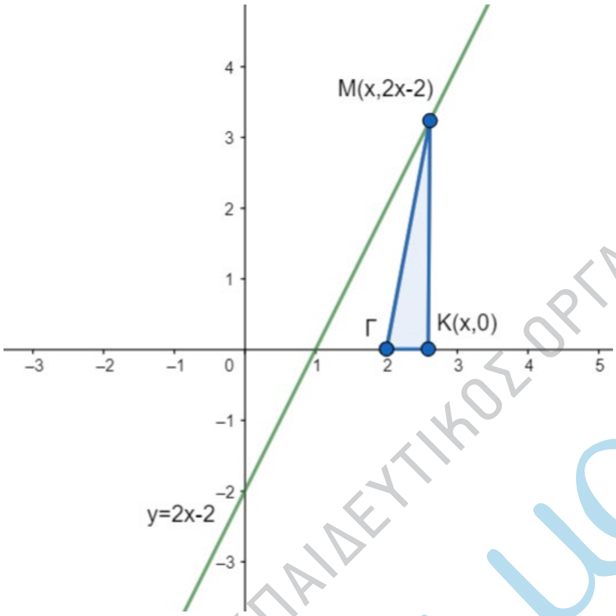
Δίνεται ότι η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $(0, -2)$, έτσι

$-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Rightarrow$

$2x_0^3 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$

Η τιμή της συνάρτησης για $x_0 = 1$ είναι $f(1) = 0$.
Άρα $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

Γ3. Γραφικά έχουμε:



Για $x = x(t)$

$$(M\Gamma K) = E(t) = \frac{1}{2}(K\Gamma)\cdot(MK) = \frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2) = (x(t)-2)(x(t)-1)$$
$$= x^2(t) - 3x(t) + 2$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ είναι
$E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$

Την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $x(t_0) = 3, y(t_0) = 4, x'(t_0) = 2\ \mu o\nu./sec$, τότε ο ρυθμός μεταβολής είναι:
$E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0) = 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2 = 6\ \tau.\mu.$

Γ4. Σημειώνουμε ότι για $x \to -\infty$ είναι $-x \to +\infty$ άρα $f(-x) = (-x)^3 + x$.

$$L = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} + \frac{(-x)^3+x}{1-x^3}\right]$$

- $\left|\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2}\right| = \frac{|\eta\mu(-2x-2)|}{|-2x-2|} \le \frac{1}{|-2x-2|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{|-2x-2|} \le \frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} \le \frac{1}{|-2x-2|}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{|-2x-2|} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{|-2x-2|} = 0\end{array}\right\} \xRightarrow{\alpha\pi o\ \kappa\rho\iota\sigma\tau\acute{\eta}\rho\iota o\ \pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma} \lim_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} = 0$$

- $\lim_{x\to -\infty} \frac{(-x)^3+x}{1-x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^3+x}{-x^3+1} = 1$

Άρα $L = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγισίμων με:

$$f'(x) = (x - ln3x)' = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Επίσης $f(1) = 1 - \ln 3$.

Η f είναι συνεχής και γν. φθιν. στο $A_1 = (0,1]$ με

$$f(A_1) = f\big((0,1]\big) = \Big[f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x)\Big) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

$$f(1) = 1 - \ln 3 < 0 \;\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\; e < 3 \Rightarrow \ln e < \ln 3 \Rightarrow 1 < \ln 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x - \ln(3x)) \overset{u=3x}{\Longrightarrow}$$

$$0 - \lim_{u\to 0^+} \ln u = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Αφού $0 \in f(A_1)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση $x_1 \in (0,1)$ η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γν. φθ. στο A_1.

Η f είναι συνεχής και γν. αυξ. Στο $A_2 = [1,+\infty)$ με

$$f(A_2) = f\big([1,+\infty)\big) = \Big[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\Big) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x\to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{\ln 3x}{x}\right)\right] = +\infty$$

γιατι $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln 3x}{x} \underbrace{=}_{D.L.H.} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{3x}(3x)'}{(x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Αφού $0 \in f(A_2)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση $x_2 \in (1,+\infty)$ η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γν. αυξ. στο A_2.
Το συνολο τιμων της f είναι $[1 - \ln 3, +\infty)$.
Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$. Έτσι

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}\Rightarrow f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0\ \forall x\in(0,+\infty)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Δ2. Σημεία τομής C_f με $x'x$: $f(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=x_1\\x=x_2\end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$

- Για $x_1<x<1\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x_1)>f(x)\Rightarrow f(x)<0$
- Για $1<x<x_2\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)<f(x_2)\Rightarrow f(x)<0$

Άρα $f(x)<0$ στο $[x_1,x_2]$.

Άρα το εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx=\int_{x_1}^{x_2}-f(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(\ln 3x-x)\,dx=$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\ln 3x\ \,dx-\int_{x_1}^{x_2}x\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln 3x\ \,dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$$[x\ \ln 3x]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x\cdot\frac{1}{x}\,dx-\left(\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right)=$$

$$x_2\ \ln 3x_2-x_1\ \ln 3x_1-[x]_{x_1}^{x_2}-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}$$

Όμως

- $f(x_1)=x_1-\ln 3x_1=0\Rightarrow x_1=\ln 3x_1$
- $f(x_2)=x_2-\ln 3x_2=0\Rightarrow x_2=\ln 3x_2$

Άρα

$$E(\Omega)=x_2^2-x_1^2-x_2+x_1-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}-(x_2-x_1)=$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{2}-(x_2-x_1)=(x_2-x_1)\left(\frac{x_2+x_1}{2}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2).$$

Δ3. Από Δ1, Δ2 είναι

$$\left.\begin{array}{r}E>0\\x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0\end{array}\right\}\Rightarrow x_1+x_2-2>0\Rightarrow x_2>2-x_1$$

$$\left.\begin{array}{r}x_2>1\\x_1<1\Rightarrow -x_1>-1\Rightarrow 2-x_1>1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\xRightarrow{f\nearrow \sigma\tau o\ (1,+\infty)}2-x_1<x_2\Rightarrow f(2-x_1)<f(x_2)\Rightarrow f(2-x_1)<0.$$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης C_f στο $M\big(x_2, f(x_2)\big)$:

$y - f(x_2) = f'\,(x_2)(x - x_2) \xRightarrow{f(x_2)=0} y = f'\,(x_2)(x - x_2)$

Αφού από Δ1 η f είναι κυρτή ισχύει $f(x) \geq y$, με την ισότητα να ισχύει για $x = x_2$, άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \quad (1)$

Από Δ1 επίσης ισχύει $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3 \quad (2)$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 1 \neq x_2$.

$\xRightarrow{(1),(2)} 2f(x) > 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Rightarrow$

$2f(x) + \ln 3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$

Εφόσον ισχύει η παραπάνω ανισότητα η εξίσωση
$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ δεν έχει λύση.