

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σωστή είναι η επιλογή γ.

A2. Σωστή είναι η επιλογή δ.

A3. Σωστή είναι η επιλογή γ.

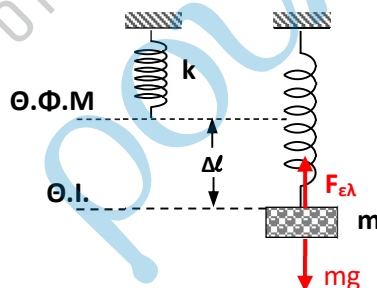
A4. Σωστή είναι η επιλογή β.

A5. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Σωστή είναι η επιλογή (i)

Πείραμα 1: Στην θέση ισορροπίας (Θ.Ι.):



$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ή} \quad F_{ελ} = mg \quad \text{ή} \quad \Delta l = \frac{mg}{k}$$

Αφού το σώμα αφήνεται ελεύθερο από την θέση φυσικού μήκους (Θ.Φ.Μ) του ελατηρίου χωρίς αρχική ταχύτητα η Θ.Φ.Μ είναι ακραία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης (Α.Α.Τ), οπότε $A_1 = \Delta l$.

Άρα:

$$A_1 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Πείραμα 2: Στη νέα θέση ισορροπίας (Ν.Θ.Ι):

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

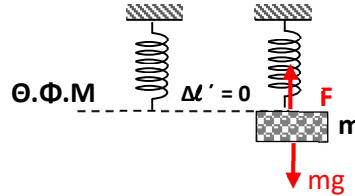
$$F - w = K\Delta l' \quad \text{ή}$$



$$mg - mg = K\Delta l' \quad \text{ή}$$

$$\Delta l' = 0$$

(Η Ν.Θ.Ι ταυτίζεται με την Θ.Φ.Μ του ελατηρίου)



$$\text{Στην αρχική θέση:} \quad \Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$k\Delta l = mg$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k}$$

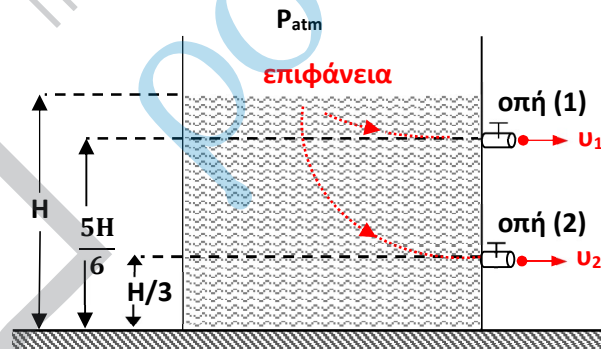
Αφού το σώμα αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα βρίσκεται στην ακραία θέση της Α.Α.Τ. Άρα:

$$A_2 = \Delta l' - \Delta l$$

$$A_2 = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

Άρα από (1), (2): $A_1 = A_2$

B2 . Σωστή είναι η επιλογή (ii)



Όταν είναι ανοιχτή μόνο η οπή (1):

Bernoulli (επιφ. \rightarrow 1):

$$p_{atm} + 0 + \rho g \left(H - \frac{5H}{6} \right) = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \quad \text{ή}$$

$$u_1 = \sqrt{2g \left(H - \frac{5H}{6} \right)} \rightarrow u_1 = \sqrt{2g \frac{H}{6}} \quad \text{ή}$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{gH}{3}} \cdot \text{Άρα} \quad \Pi_1 = A \cdot u_1 \rightarrow \Pi_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \sqrt{\frac{gH}{3}} \quad (1)$$



Όταν είναι ανοιχτές και οι δύο οπές:

$$\text{Bernoulli (επιφ. } \rightarrow 2) : p_{atm} + 0 + \rho g \left(H - \frac{H}{3} \right) = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad \text{ή}$$

$$u_2 = \sqrt{2g \left(H - \frac{H}{3} \right)} \rightarrow u_2 = \sqrt{2g \frac{2H}{3}} \quad \text{ή}$$

$$u_2 = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}$$

$$\text{Όμως ισχύει ότι: } \Pi_2 = A \cdot u_2 \quad \text{ή} \quad \Pi_2 = 2A\sqrt{\frac{gH}{3}} \quad (2)$$

Η συνολική παροχή από τις δύο οπές είναι:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t_2} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t_2} = 3A\sqrt{\frac{gH}{3}} \quad (4)$$

$$\text{Από τις (1) και (4)} \rightarrow \frac{\frac{\Delta V}{\Delta t_1}}{\frac{\Delta V}{\Delta t_2}} = \frac{A\sqrt{\frac{gH}{3}}}{3A\sqrt{\frac{gH}{3}}} \rightarrow \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{1}{3}$$

B3. Σωστή είναι η επιλογή (iii)

Η ταχύτητα της μάζας m_1 μετά την κρούση είναι:

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_2 \xrightarrow{u_2=0}$$

$$u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \xrightarrow{\cdot m_1}$$

$$m_1 u'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} m_1 u_1 \quad \text{ή}$$

$$p'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 \quad \text{ή}$$

$$\frac{p_1}{5} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_1 \quad \text{ή} \quad m_1 + m_2 = 5(m_1 - m_2) \quad \text{ή} \quad m_2 = \frac{2}{3} m_1 \quad (1)$$

Έτσι το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταβιβάστηκε από τη σφαίρα μάζας m_1 στη σφαίρα μάζας m_2 κατά την κρούση είναι:

$$\Pi\% = \frac{\Delta K_2}{K_1} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 u_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$



$$\Pi\% = \frac{m_2 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \right)^2}{m_1 u_1^2} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = \frac{4m_1^2 m_2}{m_1 (m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot 100\% \xrightarrow{(1)}$$

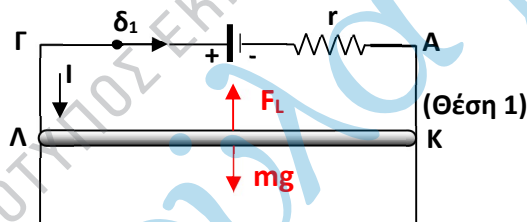
$$\Pi\% = \frac{4m_1 \frac{2}{3} m_1}{\left(m_1 + \frac{2}{3} m_1 \right)^2} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = \frac{24}{25} \cdot 100\% \quad \text{ή}$$

$$\Pi\% = 96\%.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο αγωγός ΚΛ βρίσκεται σε ισορροπία (θέση 1) άρα η η/μ δύναμη Laplace που δέχεται θα είναι αντίθετη του βάρους όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το μέτρο B της έντασης του μαγνητικού πεδίου θα είναι:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_L - w = 0 \Rightarrow B \cdot I \cdot l = m \cdot g \quad \text{ή}$$

$$B \cdot \frac{E}{r + R_{ΚΛ}} \cdot l = m \cdot g \quad \text{ή} \quad B = \frac{mg(r + R_{ΚΛ})}{E \cdot l} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{B = 1 Tesla}$$

Με κατεύθυνση από τον αναγνώστη στην σελίδα $\vec{B} \otimes$ σύμφωνα με τον κανόνα των τριών δαχτύλων του δεξιού χεριού.

Γ2. Η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη με το μέτρο της επιτάχυνσης να μειώνεται** εξαιτίας του αυξανόμενου επαγωγικού ρεύματος που δημιουργεί αυξανόμενη δύναμη Laplace αντίρροπη της ταχύτητας.

Πιο συγκεκριμένα:

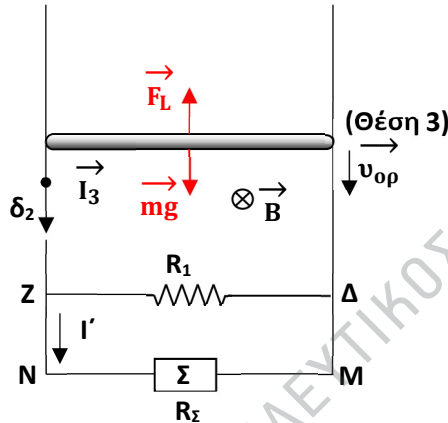
$$\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m} \quad \text{ή} \quad \alpha = \frac{m \cdot g - F_L}{m} = \frac{m \cdot g - B \cdot I_{\epsilon\pi} \cdot l}{m} \xrightarrow{I_{\epsilon\pi} = \frac{E}{R_{ολ}} = \frac{Bul}{R_{ολ}}}$$



$$a = g - \frac{B^2 l^2 u}{R_{ολ} \cdot m} \neq \text{σταθ.}$$

Επειδή το μέτρο της ταχύτητας u αυξάνεται το μέτρο της επιτάχυνσης a μειώνεται.

Η ράβδος αποκτά την οριακή της ταχύτητα στην θέση (3):



$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F'_L - m \cdot g = 0 \quad \text{ή} \quad B \cdot \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{ολ}} \cdot I_3 = m \cdot g \quad \text{ή}$$

$$\frac{B^2 l^2 u_{ορ}}{R_{κλ} + \frac{R_1 \cdot R_{\Sigma}}{R_1 + R_{\Sigma}}} = m \cdot g \quad \text{ή} \quad u_{ορ} = \frac{mg \left(R_{κλ} + \frac{R_1 \cdot R_{\Sigma}}{R_1 + R_{\Sigma}} \right)}{B^2 l^2} \quad (1)$$

Προσοχή! Ο υποψήφιος πρέπει να αποδείξει την σχέση της επαγωγικής τάσης χρησιμοποιώντας τον νόμο του Faraday:

$$E_{\varepsilon\pi} = N \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Bul.$$

Για την αντίσταση της θερμικής συσκευή:

$$P_{\Sigma} = \frac{V_{\Sigma}^2}{R_{\Sigma}} \quad \text{ή} \quad R_{\Sigma} = \frac{V_{\Sigma}^2}{P_{\Sigma}} \quad \text{ή} \quad R_{\Sigma} = 6 \Omega.$$

Από την σχέση (1) η σταθερή οριακή ταχύτητα είναι:

$$u_{ορ} = \frac{mg \left(R_{κλ} + \frac{R_1 \cdot R_{\Sigma}}{R_1 + R_{\Sigma}} \right)}{B^2 l^2} \quad \text{ή}$$

$$u_{ορ} = 12 \text{ m/s.}$$



Γ3. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του αγωγού στη θέση 2 είναι:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = w - F_L \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = m \cdot g - B \cdot I_2 \cdot l \quad \text{ή}$$

$$\frac{dp}{dt} = m \cdot g - B \cdot \frac{B \cdot \frac{u_{op}}{2} \cdot l}{R_{o\lambda}} \cdot l \quad \text{ή}$$

$$\frac{dp}{dt} = m \cdot g - \frac{B^2 \cdot l^2 \cdot u_{op}}{2 R_{o\lambda}} \quad \text{ή} \quad \frac{dp}{dt} = 1,5 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$$

Γ4. Το ρεύμα κανονικής λειτουργίας της συσκευής είναι:

$$P_{\Sigma} = V_{\Sigma} \cdot I_{\Sigma} \quad \text{ή} \quad I_{\Sigma} = \frac{P_{\Sigma}}{V_{\Sigma}} \quad \text{ή} \quad I_{\Sigma} = 1 \text{ A} \quad (1)$$

Όταν η $u = u_{op}$, το ρεύμα που διαρρέει την συσκευή είναι:

$$I' = \frac{V_{\pi}}{R_{\Sigma}} = \frac{E - I_3 \cdot R_{K\lambda}}{R_{\Sigma}} \quad \text{ή}$$

$$I' = \frac{E - \frac{E}{R_{o\lambda}} \cdot R_{K\lambda}}{R_{\Sigma}} = \frac{E \left(1 - \frac{R_{K\lambda}}{R_{o\lambda}}\right)}{R_{\Sigma}} \quad \text{ή}$$

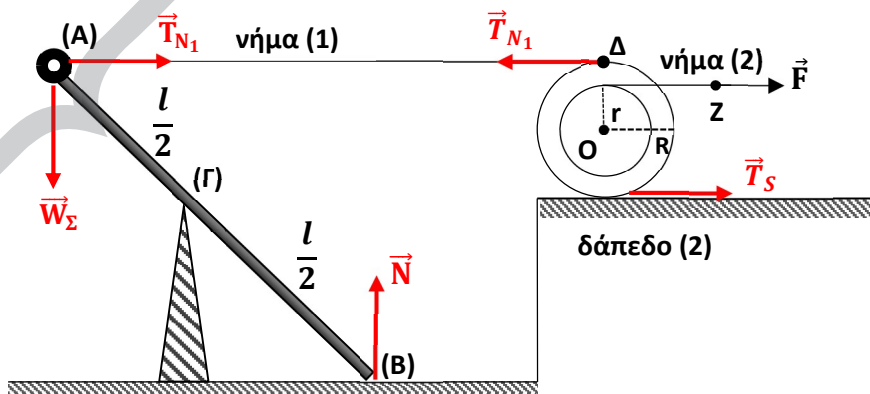
$$I' = \frac{B \cdot u_{op} \cdot l \cdot \left(1 - \frac{R_{K\lambda}}{R_{o\lambda}}\right)}{R_{\Sigma}} \quad \text{ή} \quad I' = \frac{1 \cdot 12 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{4}\right)}{6} \quad \text{ή}$$

$$I' = 1 \text{ A}$$

Άρα επειδή $I' = I_{\Sigma}$ η συσκευή λειτουργεί κανονικά.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις σε όλα τα σώματα:





Για την ισορροπία της ράβδου:

$$\Sigma \vec{\tau}_r = \vec{0} \Rightarrow$$

$$w_{\Sigma} \cdot \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + N \cdot \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - T_{N_1} \cdot \frac{l}{2} \cdot \eta\mu\varphi = 0 \quad \text{ή}$$

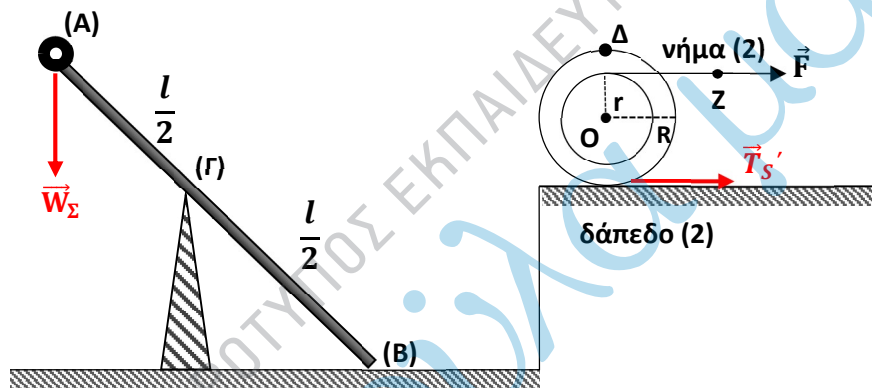
$$w_{\Sigma} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi + N \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi - T_{N_1} \cdot \eta\mu\varphi = 0 \quad \text{ή}$$

$$N = \frac{T_{N_1} \cdot \eta\mu\varphi - w_{\Sigma} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad \text{ή} \quad N = 4 \text{ N.}$$

Δ2. Για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της ράβδου:

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{(r)} = \Sigma \tau_{(r)} = I_{\rho} \cdot a_{\gamma} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_{(r)} = \frac{1}{12} \cdot M_{\rho} \cdot l^2 \cdot a_{\gamma} \quad (1)$$

Μετά την κοπή του νήματος, υπολογίζουμε την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος:



$$\Sigma \vec{\tau}_r = I_{O\Lambda} \cdot \vec{a}_{\gamma} \quad \text{ή}$$

$$\Sigma \tau = \left[I_{\rho} + m \cdot \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \cdot a_{\gamma} \quad \text{ή}$$

$$m g \cdot \frac{l}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \left(\frac{1}{12} M_{\rho} \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4} \right) \cdot a_{\gamma} \quad \text{ή}$$

$$\frac{m g}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = \left(\frac{1}{12} M_{\rho} \cdot l + m \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot a_{\gamma} \quad \text{ή}$$

$$a_{\gamma} = 3 \text{ rad/s}^2$$

Έτσι από την σχέση (1) έχουμε:

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{(r)} = \frac{1}{12} \cdot M_{\rho} \cdot l^2 \cdot a_{\gamma} \quad \text{ή} \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_{(r)} = 3 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

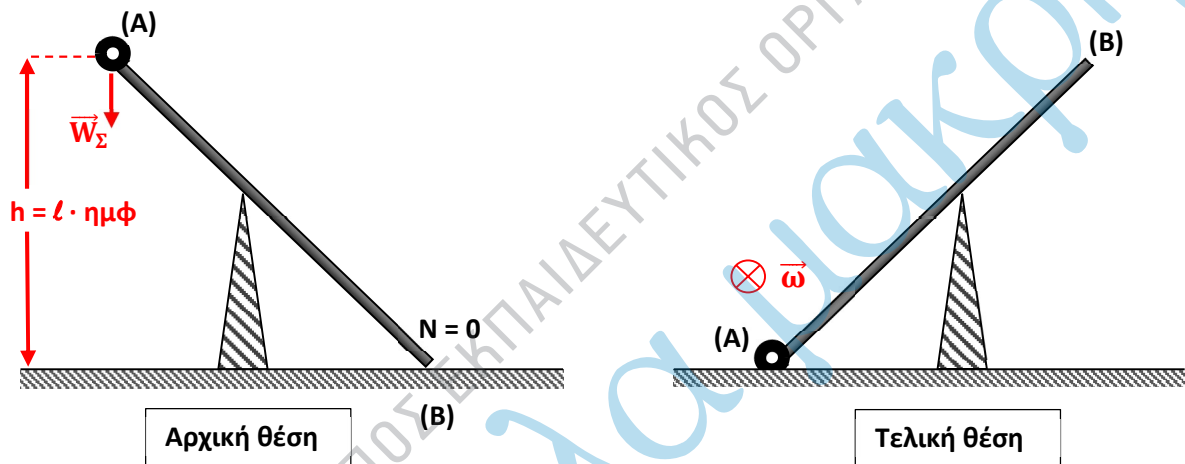


Δ3. Υπολογίζουμε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του συστήματος πριν και μετά την κρούση του σφαιριδίου με το επίπεδο (ορίζουμε ως θετική, την στροφορμή του συστήματος πριν την κρούση).

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{μετά}} - \vec{L}_{\text{πριν}} \quad \text{ή} \quad \Delta L = -I_{O\Lambda} \cdot \frac{\omega}{2} - I_{O\Lambda} \cdot \omega \quad \text{ή}$$

$$\Delta L = -\frac{3 I_{O\Lambda} \cdot \omega}{2} \quad \text{ή} \quad |\Delta L| = \frac{3 I_{O\Lambda} \cdot \omega}{2} \quad (1)$$

Για το σύστημα εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε) από την αρχική θέση μόλις κόβεται το νήμα μέχρι λίγο πριν την κρούση του σφαιριδίου με το επίπεδο.



$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \quad \text{ή}$$

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \quad \text{ή}$$

$$0 + m \cdot g \cdot l \cdot \eta \mu \phi = \frac{1}{2} I_{O\Lambda} \cdot \omega^2 + 0 \quad \text{ή}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgl\eta\mu\phi}{I_{O\Lambda}}} \quad \text{ή} \quad \omega = 4 \text{ rad/s}$$

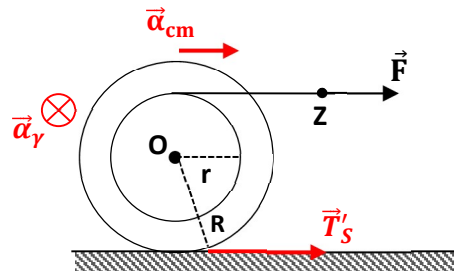
$$\text{Όπου: } I_{O\Lambda} = \frac{1}{12} M_{\rho} \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4} = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Έτσι από την σχέση (1) έχουμε:

$$|\Delta L| = \frac{3 I_{O\Lambda} \cdot \omega}{2} \quad \text{ή} \quad |\Delta L| = 12 \text{ Kg} \cdot \text{m/s}$$

Η κατεύθυνση της μεταβολής της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Δ4. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που δέχεται η τροχαλία στην διεύθυνση κίνησης:



Για την μεταφορική κίνηση της τροχαλίας εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην διεύθυνση της κίνησης (Θ.Ν.Μ):

$$\Sigma \vec{F} = M_{\tau} \cdot \vec{a}_{cm} \quad \text{ή} \quad F + T_s' = M_{\tau} \cdot a_{cm} \quad (1)$$

Για την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης (Θ.Ν.Σ.Κ):

$$\Sigma \vec{\tau}_o = I_T \cdot \vec{a}_{\gamma} \Rightarrow F \cdot r - T_s' \cdot R = \frac{1}{2} \cdot M_{\tau} \cdot R^2 \cdot \frac{a_{cm}}{R} \xrightarrow{\frac{R}{r} = \frac{0,4}{0,3} = \frac{4}{3} \text{ ή } r = \frac{3}{4}R}$$

$$F \cdot \frac{3}{4}R - T_s' \cdot R = \frac{1}{2} M_{\tau} \cdot R^2 \cdot \frac{a_{cm}}{R} \quad \text{ή}$$

$$\frac{3}{4}F - T_s' = \frac{1}{2} M_{\tau} \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) έχουμε:

$$\frac{7}{4}F = \frac{3}{2} M_{\tau} \cdot a_{cm} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = \frac{14F}{12M_{\tau}} \quad \text{ή} \quad a_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$$

Δ5. Ο τροχός κυλάει χωρίς να ολισθαίνει και η δύναμη \vec{F} έχει μεταφορικό και περιστροφικό ρόλο. Συνεπώς, το ζητούμενο έργο της δύναμης \vec{F} είναι:

$$W_F = W_{F_{μετ}} + W_{F_{περ}} \quad \text{ή}$$

$$W_F = F \cdot s_{cm} + T_F \cdot \theta \quad \text{ή}$$

$$W_F = F \cdot s_{cm} + F \cdot r \cdot \theta \quad \text{ή}$$

$$W_F = F \cdot s_{cm} + F \cdot \frac{3}{4}R \cdot \theta \xrightarrow{s_{cm} = R \cdot \theta}$$

$$W_F = F \cdot s_{cm} + F \cdot \frac{3}{4} \cdot s_{cm} = \frac{7}{4}F \cdot s_{cm} \xrightarrow{s_{cm} = \frac{1}{2}a_{cm}t^2}$$

$$W_F = \frac{7}{4}F \cdot \left(\frac{1}{2}a_{cm} \cdot t^2 \right) \quad \text{ή}$$

$$W_F = 84J$$