ΠΡΟΤΥΠΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ
ρούλα μακρή

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ 2024
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Προτεινόμενες απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 76

Α2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 155

Α3. Θεώρημα σχολικό βιβλίο σελίδα 216

Α4. α) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 25)

β) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 52)

γ) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 114)

δ) Λ (σχολικό βιβλίο σελίδα 142)

ε) Σ (σχολικό βιβλίο σελίδα 212)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f=\frac{g}{h}$ για $x\in D_g\cap D_h-\{x\in D_h\,/\,h(x)\neq 0\}$

Είναι $D_g\cap D_h=[1,+\infty)$ οπότε $D_f=D_g\cap D_h-\{x\in D_h\,/\,h(x)\neq 0\}=[1,+\infty)-\{1\}=(1,+\infty)$

Είναι

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}^2-\frac{1}{\sqrt{x}^2}}=\frac{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{x-\frac{1}{x}}=\frac{x+2+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x-1}$$

Τελικά είναι $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ με $D_f=(1,+\infty)$

Είναι $D_r=D_g\cap D_h=[1,+\infty)$ και $r(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=x-\frac{1}{x}$

B2. Είναι $f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'\cdot(x-1)-(x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$ για κάθε

$x\in(1,+\infty)$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της άρα και 1-1

οπότε ορίζεται η αντίστροφη της.

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}=y\Leftrightarrow(x-1)y=x+1\Leftrightarrow xy-y=x+1\Leftrightarrow xy-x=y+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(y-1)=y+1\Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-1}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1}$$

Είναι $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$ με $D_{f^{-1}}=f(D_f)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε είναι

$f(D_f)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\right)=(0,1)$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot(x+1)\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$

και $x-1>0$ για $x\to1^+$

B3.Είναι $r(x)=x-\frac{1}{x}$ με $D_r=[1,+\infty)$. Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί ορίζεται και είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και εξετάζουμε αν πλάγια-οριζόντια μόνο στο $+\infty$

Υπολογίζουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[r(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[r(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0=\beta$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

Άρα η $\varepsilon: y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r στο $+\infty$

B4.

Η εξίσωση έχει νόημα όταν $\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_{f^{-1}} \\ x\in D_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες x=4, x=1, x=-1 με τις δύο τελευταίες να απορρίπτονται.

ΘΕΜΑ Γ

Είναι $f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda}, & 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x\ge 2 \end{cases}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $D_f=[0,+\infty)$ οπότε είναι συνεχής και στο $x_0=2$.

Τότε ισχύει $\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^+}f(x)=f(2)$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=e^{\lambda}$$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right) = 1+\lambda$

$f(2) = 1+\lambda$

Τότε πρέπει $e^\lambda = 1+\lambda \Leftrightarrow e^\lambda - \lambda - 1 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1,\ x\in\mathbb{R}$ με προφανή ρίζα το x=0.

Είναι $g'(x) = \left(e^x - x - 1\right)' = e^x - 1$

Για $x>0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Τότε το x=0 είναι μοναδική ρίζα της g οπότε και λ=0.

Εναλλακτικά, γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

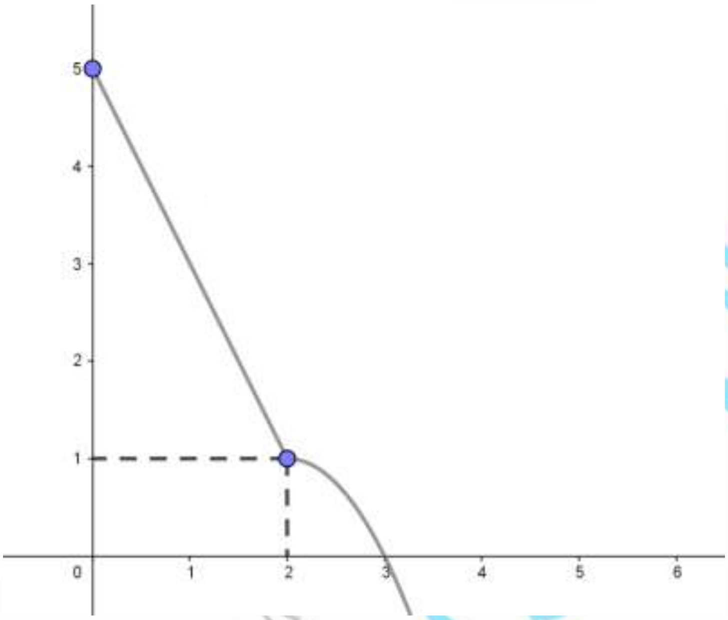
Γ2. Για λ=0 είναι $f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0\leq x<2 \\ -x^2+4x-3, & x\geq 2 \end{cases}$

Για $x\in[0,2)$ είναι $f'(x) = (-2x+5)' = -2$

Για $x\in(2,+\infty)$ είναι $f'(x) = \left(-x^2+4x-3\right)' = -2x+4$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	-
$f(x)$	↘		↘

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $[0,2)$ και $[2,+\infty)$ και αφού η f είναι συνεχής στο x_0=2 είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.



Για $x \in A_1 = [0,2)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x),\ f(0)\right] = (1,\ 5]$

Για $x \in A_2 = (2,+\infty)$, η f γνησίως φθίνουσα οπότε $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x),\ f(2)\right] = (-\infty,\ 1]$

Τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (1,\ 5] \cup (-\infty,\ 1] = (-\infty,\ 5]$

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=0 το f(0)=5

Γ3. i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 3] και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(0,2)$ και $(2,3)$.

Εξετάζουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=2 με τον ορισμό της παραγώγου αφού εκεί αλλάζει ο τύπος της.

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2x+5-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2x+4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2(x-2)}{x-2} = -2$

και $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-(x-2)^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left[-(x-2)\right] = 0$

Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0=2

Οπότε δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα [0,3].

ii. Ο συντελεστής διεύθυνσης του ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ είναι ίσος με $\lambda_{ΔΕ}=\frac{-5}{3}$

Για $x\in A_1=[0,2)$, $f'(x)=\frac{-5}{3}\Leftrightarrow -2=\frac{-5}{3}$ αδύνατη

Για $x\in A_2=(2,+\infty)$, $f'(x)=\frac{-5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=\frac{-5}{3}\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}\in A_2$

Άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία είναι παράλληλη στο ΔΕ

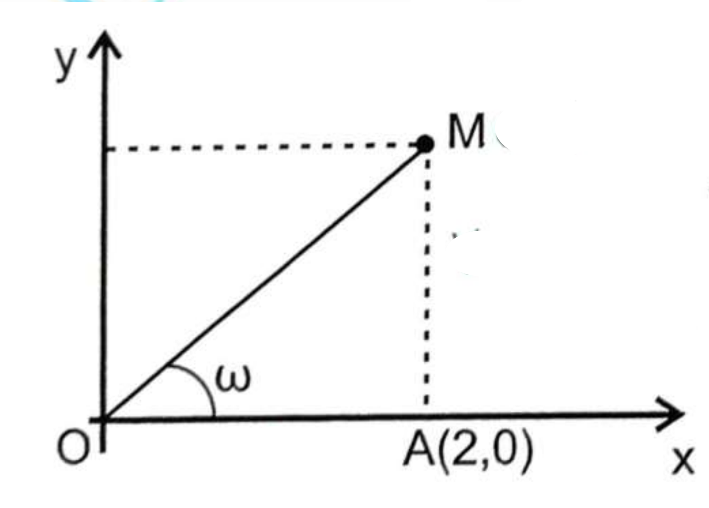
Γ4. Έστω $M(2,y)$ της κατακόρυφης ευθείας στο Α. Από το τρίγωνο ΟΜΑ έχουμε

$\text{εφ}\omega=\frac{y_M}{x_M}=\frac{y}{2}$ οπότε είναι $\text{εφ}(\omega(t))=\frac{y(t)}{2}, t\geq 0$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης έχουμε

$$\left[\text{εφ}(\omega(t))\right]'=\left(\frac{y(t)}{2}\right)'\Leftrightarrow\frac{1}{\text{συν}^2(\omega(t))}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}\Leftrightarrow\left[1+\text{εφ}^2(\omega(t))\right]\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2}$$

Για $t=t_0$ είναι $\left[1+\text{εφ}^2(\omega(t_0))\right]\cdot\omega'(t_0)=\frac{y'(t_0)}{2}$ (1)



Είναι $y(t_0)=1$, οπότε $εφ(ω(t_0))=\frac{1}{2}$. Ακόμα η ταχύτητα είναι ίση με υ=0,5 μονάδες μήκους/sec οπότε έχουμε $y'(t)=\frac{1}{2}$ για $t\geq 0$. Είναι $y'(t_0)=\frac{1}{2}$ και από την σχέση (1) έχουμε

$$\left[1+εφ^2(ω(t_0))\right]\cdot ω'(t_0)=\frac{y'(t_0)}{2}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot ω'(t_0)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow ω'(t_0)=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{1}{5}$$ μονάδες ανά sec.

Εναλλακτικά

Είναι $\frac{1}{συν^2(ω(t))}\cdot ω'(t)=\frac{y'(t)}{2}$ οπότε για $t=t_0$ έχουμε $\frac{1}{συν^2(ω(t_0))}\cdot ω'(t_0)=\frac{y'(t_0)}{2}$ (1) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος βρίσκουμε $(OM)=\sqrt{5}$ και $συν(ω(t_0))=\frac{(OA)}{(OM)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

Η (1) μας δίνει $\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot ω'(t_0)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{4}{5}}\cdot ω'(t_0)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow ω'(t_0)=\frac{1}{5}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f γράφεται ως $f(x)=\frac{\ln x+αx}{x}=\frac{\ln x}{x}+α$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $D_f=(0,+\infty)$ πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+α\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow\ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$ και

$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow -\ln x>-1\Leftrightarrow\ln x<\ln e\Leftrightarrow x<e$.

Από τον παρακάτω πίνακα φαίνεται ότι η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1=e$ το $f(e)=\frac{\ln e}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+\alpha$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Από το σύνολο τιμών που δίνεται η συνάρτηση f έχει μέγιστο $\frac{1}{e}+1$ οπότε είναι $\frac{1}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+1\Leftrightarrow\alpha=1$.

Δ2. Είναι $f(x)=\frac{\ln x}{x}+1$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (πράξεις συνεχών) και είναι $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1<0$ και $f(1)=\frac{\ln 1}{1}+1=1>0$.

Ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$ οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.Αυτό είναι μοναδικό γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq(0,+\infty)$.

Δ3. i. $f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{\ln 2^2}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$

Για $x\in(0,e]$ είναι $f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2$ γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για $x\in(e,+\infty)$ είναι $f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ii. $2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x\ln 2 \le 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2}+1 \le \frac{\ln x}{x}+1 \Leftrightarrow f(2) \le f(x)$

Για $x \in (0,e]$ είναι $f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow x \ge 2$ γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για $x \in (e,+\infty)$ είναι $f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow f(x) \ge f(4) \Leftrightarrow x \le 4$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Τελικά είναι $x \in [2,4]$

Δ4. Είναι $f(e^x) = \frac{\ln e^x}{e^x}+1 = \frac{x}{e^x}+1$ και

$$\left[f(e^x)\right]' = \left(\frac{x}{e^x}+1\right)' = \frac{x' \cdot e^x - x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

Άρα είναι $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} = f(e^x) \cdot \left[f(e^x)\right]' = \left[\frac{f^2(e^x)}{2}\right]'$

Το εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)|dx$.

Για το πρόσημο της $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} = \left(\frac{x}{e^x}+1\right)\frac{1-x}{e^x} = \frac{x+e^x}{e^x} \cdot \frac{1-x}{e^x}$ έχουμε ότι

$-\ln 2 < x < 0 \Leftrightarrow 0 < -x < \ln 2 \Leftrightarrow 1 < 1-x < 1+\ln 2$ οπότε $1-x > 0$ για $x \in [-\ln 2, 0]$ και $e^x > 0$.

Άρα το πρόσημο της g εξαρτάται από το πρόσημο του όρου $x+e^x$

Θεωρούμε $h(x) = x+e^x$, $D_h = \mathbb{R}$ με $h'(x) = (x+e^x)' = 1+e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε

$-\ln 2 < x < 0 \Leftrightarrow h(-\ln 2) < h(x) < h(0) \Leftrightarrow -\ln 2 + e^{-\ln 2} < h(x) < 0 + e^0 \Leftrightarrow -\ln 2 + \frac{1}{2} < h(x) < 1$

Από θεώρημα Bolzano στο $[-\ln 2, 0]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\ln 2, 0)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$. Αυτό είναι μοναδικό γιατί η συνάρτηση h είναι γνησίως μονότονη.

Για $x<\xi \Leftrightarrow h(x)<h(\xi) \Leftrightarrow h(x)<0$ και για $x>\xi \Leftrightarrow h(x)>h(\xi) \Leftrightarrow h(x)>0$

Τότε στο $[-\ln 2,\xi)$ έχουμε $g(x)<0$ και στο $(\xi,0]$ έχουμε $g(x)>0$

Για $x_1 \in (-\ln 2,0) \Leftrightarrow -\ln 2<x_1<0 \Leftrightarrow e^{-\ln 2}<e^{x_1}<e^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<e^{x_1}<1$ οπότε είναι $e^{x_1}=\xi$ λόγω της μοναδικότητας της ρίζας της $h(x)=0$

Τότε $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=0$ η οποία έχει λύση το ξ=x_0 του Δ2.

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx=-\int_{-\ln 2}^{x_0} g(x)dx+\int_{x_0}^{0} g(x)dx=-\left[\frac{f^2(e^x)}{2}\right]_{-\ln 2}^{x_0}+\left[\frac{f^2(e^x)}{2}\right]_{x_0}^{0}=$$

$$=-\left(\frac{f^2(e^{x_0})}{2}-\frac{f^2(e^{-\ln 2})}{2}\right)+\left(\frac{f^2(e^0)}{2}-\frac{f^2(e^{x_0})}{2}\right)=-\frac{f^2(e^{x_0})}{2}+\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(e^{x_0})}{2}=$$

$$=-f^2(e^{x_0})+\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}=0+\frac{(1-2\ln 2)^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-4\ln 2+4\ln^2 2+1}{2}=2\ln^2 2-2\ln 2+1$$