ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολ. Βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολ. Βιβλίο σελ. 104

Α3. Σχολ. Βιβλίο σελ. 128

Α4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έχουμε $D_h = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$. Για να ορίζεται η συνάρτηση f=goh πρέπει:

$$x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g$$

$$x \in (0, +\infty) \text{ και } lnx \in \mathbb{R}$$

Αρα $D_f = D_{goh} = (0, +\infty)$

$$f(x) = (goh)(x) = g\big(h(x)\big) = \frac{4 - e^{2h(x)}}{e^{h(x)}} = \frac{4 - e^{2lnx}}{e^{h(x)}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Β2.

i.) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο D_f ως ρητή με:

$$f'(x) = \left(\frac{4 - x^2}{x}\right)' = \frac{(4 - x^2)'x - (4 - x^2)x'}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2}$$
$$= -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$$

για κάθε x>0.
αρα η f γν.φθιν στο $(0, +\infty)$.

ii.) Έχουμε $e < \pi \Leftrightarrow f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \Leftrightarrow \pi(4-e^2) > e(4-\pi^2) \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi(4-e^2)}{e(4-e^2)} < \frac{e(4-\pi^2)}{e(4-e^2)} \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$$

B3.

Κατακόρυφες: (στο 0)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = +\infty$ γιατί

$\lim_{x\to 0^+} 4-x^2 = 4$ και $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Αρα έχει κατακορυφη ασύμπτωτη την ευθεία x=0 (ο άξονας y'y)

Οριζόντιες/πλάγιες: (στο $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(-1) = -1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{x} + x = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0 = \beta$$

Άρα έχει πλάγια ασύμ. στο $+\infty$ *την*

$$\varepsilon: y = \alpha x + \beta$$

$$\varepsilon: y = -x$$

B4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{4-x^2}$

Έχουμε:

$$|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)| \leq 1$$

$$\left|\frac{x}{4-x^2}\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right| \leq \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

$$-\left|\frac{x}{4-x^2}\right| \leq \frac{x}{4-x^2}\sigma\upsilon\nu(1+x^2) \leq \left|\frac{x}{4-x^2}\right|$$

Και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x} = 0$$

Άρα από κριτήριο παρεμβολής εχουμε:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{4-x^2}\sigma\upsilon\nu(1+x^2) = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\int_2^3 \mathrm{xf(x)}\,\mathrm{dx} = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 \mathrm{x}\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)\mathrm{dx} = 1 \Leftrightarrow \int_2^3 (1+\alpha x)\,\mathrm{dx} = 1 \Leftrightarrow$$

$$[x]_2^3 + \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = 1 \Leftrightarrow (3-2)+\alpha\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 1+\frac{5\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Γ2.

i.) $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1$

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$

Άρα η f παραγ/μη στο 1 με $f'(1) = -1$ άρα ορίζεται η εφαπτομένη της γρ. παρ. της f στο 1.

ii.) Έχουμε $f'(1) = -1$
εφω=-1

$$\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}$$
$$\omega = \frac{3\pi}{4}$$

Γ3.

- Για x<1 $f'(x) = 2x - 3$

Αρα x<1 , 2x<2 , 2x-3<-1 αρα $f'(x) < 0$ αρα f γν φθιν στο $(-\infty, 1)$

- Για $x \geq 1$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ *αρα η f γν.φθιν στο* $[1, +\infty)$

Αρα η f γν. φθιν στο $\mathbb{R}$ *άρα 1-1*

$x \in A_1 = (-\infty, 1)$ *άρα* $f(A_1) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to -\infty} f(x)\right) = (1, +\infty)$

$x \in A_2 = [1, +\infty)$ *άρα* $f(A_2) = (\lim_{x\to +\infty} f(x), f(1)] = (0,1]$

Αρα το συνολο τιμων είναι: $f(A) = f(A_1) U f(A_2) = (0, +\infty)$

Γ4.

- $\mathrm{f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -x + 2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 1}$
- $\mathrm{f(x) > y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > -x + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0}$
- $\mathrm{y = 0}$ αρα $\mathrm{x = 2}$

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x) - y|\, dx = \int_1^2 |f(x) - y|\, dx + \int_2^e |f(x)|\, dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx + \int_2^e \frac{1}{x} dx = [ln|x|]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - 2[x]_1^2 + [ln|x|]_2^e$$

$= ln2 - ln1 + \frac{3}{2} - 2 + lne - ln2 = \frac{1}{2}$ τμ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$\alpha\varphi o\upsilon\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1} = l \in \mathbb{R}$ Πρέπει

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-2x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa-2x\right) = 0 \Rightarrow ln1-1+\kappa-2 = 0$$

$$\Rightarrow \kappa = 3$$

Δ2.

- $f(x) = ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\ \mu\varepsilon\ \pi.o.D_f = (0,2)$

  Η f παραγ στο (0,2) ως πράξεις παραγ με:

  $$f'(x) = \frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

x	0	1	2
x^2+x-2	-	O	+
x-2	-		-
f'	+	O	-
f	↗		↘

$x \in A_1 = (0,1] \Rightarrow f(A_1) = (\lim_{x \to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, 2]$

$x \in A_2 = (1,2) \Rightarrow f(A_2) = (\lim_{x \to 2^-} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)) = (-\infty, 2)$

$0 \in f(A_1)$ *αρα υπάρχει μοναδικό* $x_1 \in (0,1) : f(x_1) = 0$

$0 \in f(A_2)$ *αρα υπάρχει μοναδικό* $x_2 \in (1,2) : f(x_2) = 0$

- *Αν ισχύει* $x_1 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f(x_1) \geq ln\frac{5}{3} \Rightarrow 0 \geq \frac{5}{3}$ *(άτοπο) άρα* $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3.

- f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$
- f παρ/μη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

αρα από ΘΜΤ επάρχει τουλ. ενα $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) : f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$

$$f(x) = ln(2 - x) - \frac{1}{x} + 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x^2}$$

$f''(x) = -\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^3} < 0$ *άρα f' γν,φθιν άρα το ξ μοναδικό.*

Δ4.

i.) Οι F,G αρχικες της f άρα $F'(x) = G'(x) = f(x)$ αρα $F(x) = G(x) + c$

Για $x = x_1 \Rightarrow F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow G(x_1) + c = 0$

Για $x = x_2 \;\Rightarrow\; F(x_2) = G(x_2) + c \;\Rightarrow\; F(x_2) = c$

Αρα $\qquad G(x_1) + F(x_2) = 0$

ii.) Εστω $\mathrm{h(x)} = x_1F(x) + x_2G(x) - x_1 - x_2 + 2x$

- h συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- $h(x_1) = \cdots = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2$
- $h(x_2) = \cdots = x_1F(x_2) + x_2 - x_1$

$x \in D_1 = (x_1, 1] \Rightarrow f(D_1) = (0,2]$

$x \in D_2 = (1, x_2) \Rightarrow f(D_2) = (0,2]$

Εχουμε f(x)>0 στο $[x_1, x_2]$ *αρα F'(x)>0 στο* $[x_1, x_2]$

Αρα F γν αυξ

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \Rightarrow 0 < F(x_2)$ *Οποτε*

$$h(x_1) = -x_2F(x_2) + x_1 - x_2 < 0$$

$$h(x_2) = x_1F(x_2) + x_2 - x_1 > 0$$

αρα από Θ Bolzano υπαρχει $\rho \in (x_1, x_2) : h(\rho) = 0$

$h'(x) = x_1F'(x) + x_2G'(x) + 2 = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$

Αρα h γν αυξ. Αρα το ρ μοναδικό.